Jagiellońskie Warsztaty Olimpijskie 2025/2026

Spotkanie 5 (7 lutego 2026)

Dominik Bysiewicz, Kacper Piotrowski, Jakub Węgrecki

CIĄGI

Zadanie 1. Dany jest nieskończony, silnie rosnący ciąg dodatnich liczb całkowitych (a_n). Udowodnić, że istnieje dokładnie jedno takie $n \in \mathbb{Z}_+$, że
$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Zadanie 2. Obliczyć
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n}.$$

Zadanie 3. Niech c będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Ciąg (a_n) jest określony jako
$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = d(a_n) + c,$$
gdzie $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby m. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że ciąg $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ jest okresowy.

Zadanie 4. Udowodnić, że z każdego ciągu liczb naturalnych można wybrać podciąg, którego każde dwa wyrazy są względnie pierwsze, lub podciąg, którego wszystkie wyrazy mają wspólny dzielnik większy od 1.

Zadanie 5. Ciąg liczb rzeczywistych określony jest następująco:
$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 3/7, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}.$$
Obliczyć a_{2022}.

Zadanie 6. Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n) dodatnich liczb rzeczywistych. Udowodnić, że
$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

Zadanie 7. Niech (x_n) będzie silnie rosnącym ciągiem liczb naturalnych spełniającym warunki:

dla pewnego $j > 1$ zachodzi $x_j = j$ oraz dla każdych względnie pierwszych k, l zachodzi $x_{kl} = x_k x_l$.

Wykazać, że $x_n = n$ dla każdego n.

Zadanie 8. Dana jest liczba całkowita c. Ciąg $(a_n)_\infty$ jest zadany wzorami:
$$a_1 = c \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2-1)(a_n^2-1)}.$$
Wykazać, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

Zadanie 9. Dana jest liczba całkowita a oraz ciąg $(a_i)_\infty$ dany wzorem
$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + a}{a_n}.$$
Wykazać, że jeśli wszystkie liczby a_1, a_2 oraz $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a}{a_1a_2}$ są całkowite, to każdy wyraz ciągu jest liczbą całkowitą.

Zadanie 10. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, ..., że dla dowolnej liczby całkowitej $d \neq 0$ istnieje dokładnie 2025 różnych par indeksów (i, j), dla których $a_i - a_j = d$.

Zadanie 11. Znaleźć wszystkie nieskończone ciągi (a_n) dodatnich liczb całkowitych zdefiniowanych jako

$$a_{n+1}^2 = 1 + (n + 2021) \cdot a_n, \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Zadanie 12. Niech ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie takim nieskończonym ciągiem liczb rzeczywistych, że

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \geqslant a_n$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_+$. Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Zadanie 13. Niech $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunki:

$$a_0 = a_N = 0 \qquad \text{oraz} \qquad a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} = a_i^2$$

dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$. Wykazać, że $a_i \leqslant 0$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$.

Zadanie 14. Danych jest $n \geqslant 3$ dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Przyjmijmy

$$b_i := \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$$

dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ (przy czym $a_0 = a_n$ oraz $a_{n+1} = a_1$). Załóżmy, że dla wszystkich i, j w zakresie od 1 do n zachodzi

$$a_i \leqslant a_j \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad b_i \leqslant b_j.$$

Wykazać, że $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Zadanie 15. Dany jest ciąg (a_n) dodatnich liczb rzeczywistych. Udowodnić, że dla nieskończenie wielu n spełniona jest nierówność

$$a_n + 1 > a_{n-1} \sqrt[n]{2}.$$